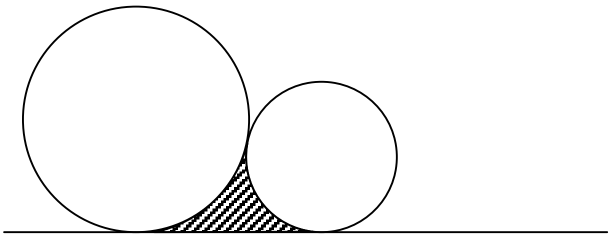
RESOLUÇÃO DA 1ª AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA
UNIDADE I - 2017

PESQUISA: PROF. ADIANO CARIBÉ E PROF WALTER PORTO.
RESOLUÇÃO: PROFA. MARIA ANTÔNIA CONCEIÇÃO GOUVEIA.

Questão 01.

Duas mesas, com tampo circular de vidro, de raios 20 cm e 60 cm, estão encostadas numa parede conforme a figura abaixo.

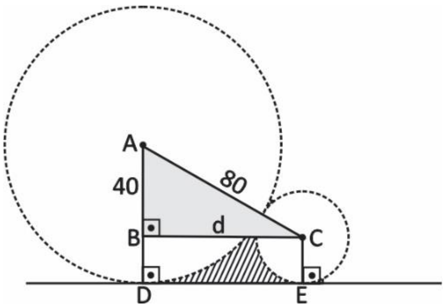


Na região hachurada, que fica delimitada pelas mesas e a parede deseja-se colocar um novo tampo de alumínio, fixado na parede, para evitar a queda de objetos naquela região.

Calcule a medida do lado do tampo de alumínio que ficará em contato com a parede. (Use $\sqrt{3}$ = 1,7).

A) 40 cm B) 50 cm C) 56 cm D) 62 cm E) 68 cm

RESOLUÇÃO:



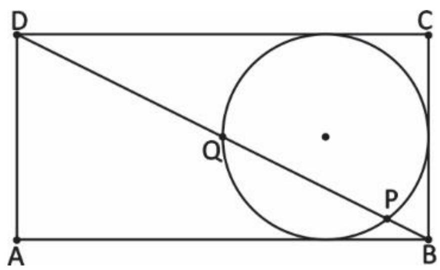
Seja o Δ ABC retângulo em B.
AC = 60 + 20 = 80; AB = 60 – 20 = 40 e BC = DE = d.
Por Pitágoras: $6400 = 1600 + d^2 \Rightarrow d^2 = 4800 \Rightarrow d^2 = 1600 \times 3 \Rightarrow$
$d = 40\sqrt{3} \Rightarrow d \cong 40 \times 1{,}7 = 68$.

RESPOSTA: A medida do lado do tampo de alumínio que ficará em contato com a parede é 68 cm.
ALTERNATIVA E.

Questão 02.

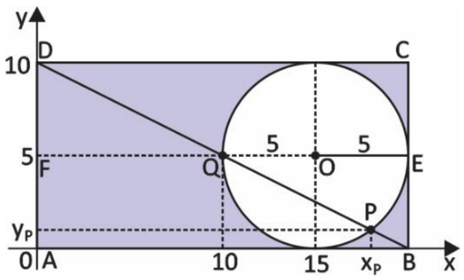
Nos séculos XVII e XVIII, foi desenvolvida no Japão uma forma particular de produzir matemática. Um dos hábitos que a população adotou foi o de afixarem templos placas contendo problemas, em geral de geometria. Essas placas, conhecidas como *sangaku*, apresentavam o problema com ilustrações e a resposta, sem registrar a solução dos autores. O seguinte problema foi adaptado de um desses *sangakus*: considere ABCD um retângulo com AB = 20 e AD = 10; tome uma circunferência de centro O tangente aos lados AB, BC e CD do retângulo, e seja BD uma de suas diagonais, interceptando a circunferência nos pontos *P* e *Q*.

A corda PQ mede:



A) $4\sqrt{5}$
B) 8
C) $5\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{2}$
E) 9

RESOLUÇÃO:



1. Associando à figura um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o vértice A do retângulo ABCD, percebe-se que o centro da circunferência é o ponto O(15, 5), que seu raio é 5.

2. $\overline{EF} // \overline{AB}$ tem como extremidade o ponto médio do lado $\overline{BC}$, logo Q é o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$ e x_q é abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$, assim x_q =10.Tem-se Q = (15, 5).

A equação da circunferência é $(x – 15)^2 + (y – 5)^2 = 25$.

A equação da reta que contém a diagonal $\overline{BD}$ é: $y=-\frac{1}{2}x+10$

Para determinar as coordenadas do ponto P resolve-se o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+10 \\ (x-15)^2+(y-5)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-30x+225+\left(-\frac{1}{2}x+5\right)^2=25 \\ x^2-30x+225+\frac{x^2}{4}-5x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2-140x+900=0 \\ x^2-28x+180=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x=\frac{28\pm\sqrt{784\text{-}720}}{2} \Rightarrow x=\frac{28\pm 8}{2} \Rightarrow x_Q=10 \text{ ou } x_P=18 \Rightarrow y_P=1 \Rightarrow P(18,1).$$

Sendo Q = (10, 5) e P = (18, 1), PQ = $\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

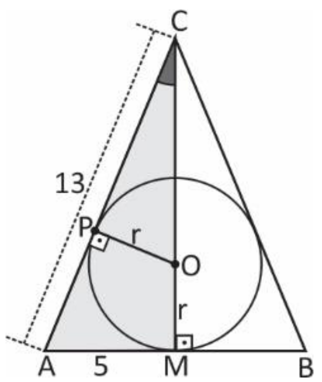
RESPOSTA: PQ = $\mathbf{4\sqrt{5}}$. ALTERNATIVA A.

Questão 03.

Calcule o raio do círculo inscrito num triângulo de lados 13 cm , 13 cm e 10 cm.

A) $\frac{10}{3}$ cm B)4 cm C) $\sqrt{10}$ cm D) $\frac{15}{4}$ cm E) *NRA*

RESOLUÇÃO:



De acordo com a figura ao lado, os triângulos retângulos CPO e CAM são semelhantes porque possuem em comum o ângulo agudo $\hat{C}$. Logo seus lados homólogos (opostos a ângulos com a mesma medida) são proporcionais: $\frac{AM}{PO}=\frac{CA}{CO}$.

$CM=\sqrt{13^2-5^2} \Rightarrow CM=\sqrt{169-25} \Rightarrow CM=\sqrt{144} \Rightarrow CM=12 \Rightarrow CO=12-R$

Então, $\frac{5}{r}=\frac{13}{12-r} \Rightarrow 13r=60-5r \Rightarrow 18r=60 \Rightarrow r=\frac{10}{3}$.

RESOLUÇÃO: O raio do círculo inscrito num triângulo de lados 13 cm , 13 cm e 10 cm mede $\mathbf{\frac{10}{3}}$ cm. ALTERNATIVA A.

Questão 04.

O *Homem Vitruviano* de Leonardo da Vinci é usado como referência estética de simetria e proporção no mundo todo.

Na figura 2, tem-se um sistema de coordenadas cartesianas no qual foram desenhados uma circunferência δ, de centro C, e um quadrado, como se observa na figura do Homem Vitruviano.

Assim sendo, o raio da circunferência δ é

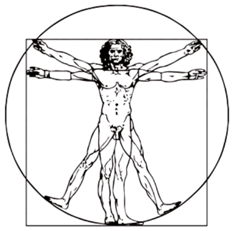


figura 1

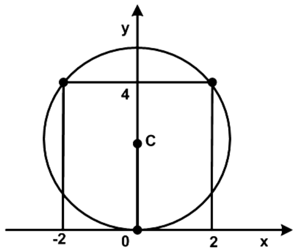
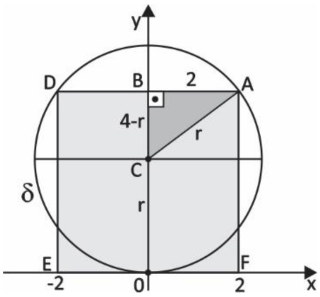


figura 2

A) 2 B) 2,5 C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO:



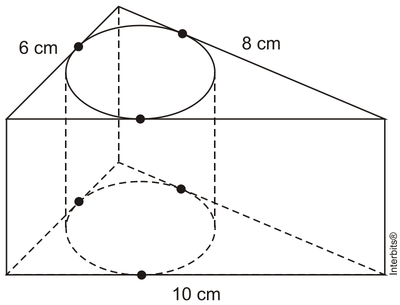
O lado do quadrado ADEF mede 4. Logo no triângulo retângulo ABC, AB = 2, BC = 4 – r e CA = r.

$r^2 = 2^2 + (4-r)^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 16 - 8r + r^2 \Rightarrow 8r = 20 \Rightarrow r = 2{,}5$.

RESPOSTA: o raio da circunferência δ é 2,5.
ALTERNATIVA B.

Questão 05. (ENEM-2010)

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



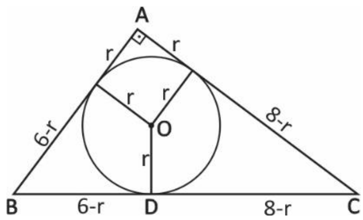
O raio da perfuração da peça é igual a

A) 1 cm. B) 2 cm. C) 3 cm. D) 4 cm. E) 5 cm.

RESOLUÇÃO:

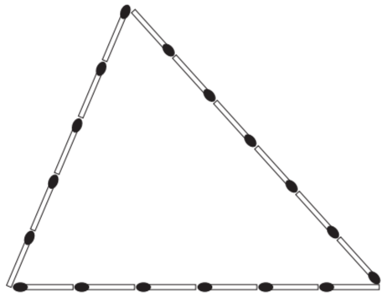
O triângulo ABC é retângulo, pois, $10 = 6^2 + 8^2$.

Pela figura ao lado, $6 - r + 8 - r = 10 \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2$.



RESPOSTA: **O raio da perfuração da peça é igual a 2cm.**
Alternativa B.

Questão 06. (ENEM-2014)



Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

A) 3. B) 5. C) 6. D) 8. E) 10.

RESOLUÇÃO:

Sejam 6 palitos, **a** palitos e **b** palitos as medidas dos três lados do triângulo de perímetro 17 palitos, logo a + b = 11.

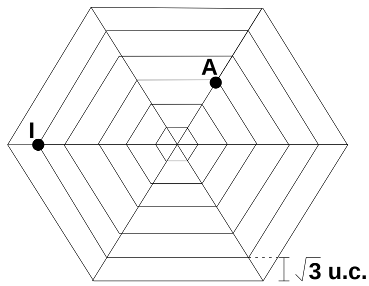
a) Como em qualquer triângulo a medida de cada lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados, tem-se 6 < a + b, a < b + 6 e b < a + 6 .

	6	a	b	a + b	6 + a	6 + b
I	6	8	3	6<11	b<14	a<9
II	6	7	4	6<11	b<13	a<10
III	6	6	5	6<11	b<12	a<11

b) Então a quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é 3.

RESPOSTA: Alternativa A.

Questão 07. (BAHIANA-2010.1)



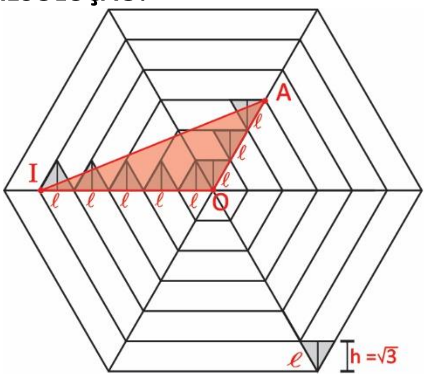
Interações entre duas espécies de uma comunidade, tais como competição, predação ou mutualismo, em geral, provocam alterações na dinâmica populacional de ambas as espécies, que pode ser prejudicial ou benéfica para uma das espécies ou para ambas.

Uma aranha (predador) constrói uma teia, que é formada por hexágonos regulares concêntricos e igualmente espaçados. Num dado instante em que a aranha se encontra no ponto A da teia, um inseto (presa) pousa no ponto I dessa mesma teia e não consegue se libertar.

Nessas condições, a menor distância que a aranha pode percorrer para devorar sua presa é, em u.c., igual a:

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

RESOLUÇÃO:



A menor distância que a aranha pode percorrer para devorar sua presa é, a distância determinada pelo segmento $\overline{AI}$.

O triângulo destacado é um triângulo equilátero de lado ℓ e altura $\sqrt{3}$.

Como $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \ell\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2$

Então no ΔAOI, escaleno e AÔI = 120°, AO = 3 ℓ = 6, OI = 5 ℓ = 10 e AI = x.
Aplicando a Lei dos Cossenos:

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2.6.10.\cos 120° \Rightarrow x^2 = 136 - 120.\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 136 + 60 \Rightarrow x = 14$

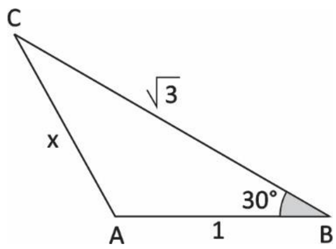
RESPOSTA: Alternativa D.

Questão 08.

Num triângulo ***ABC***, o lado $\overline{AB}$ mede 1 u.c., o lado $\overline{BC}$, $\sqrt{3}$ u.c. e o ângulo $\hat{B}$ mede 30º. Sendo assim, o perímetro do triangulo ABC, em u.c., é:

A) menor que 3.
B) maior que 3 e menor que 3,5.
C) maior que 3,5 e menor que 4.
D) maior que 4 e menor que 4,5.
E) maior que 4,5.

RESOLUÇÃO:



Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABC:

$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2.\sqrt{3}.1.\cos 30° \Rightarrow x^2 = 1 + 3 - 2.\sqrt{3}.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 4 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

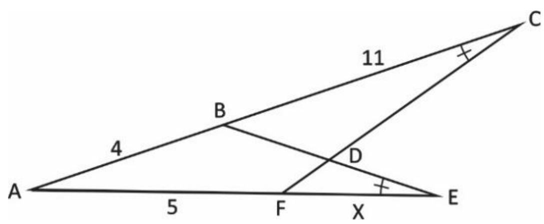
AB + BC + AC $\cong$ $1 + 1{,}7 + 1 = 3{,}7$

RESPOSTA: ALTERNATIVA C

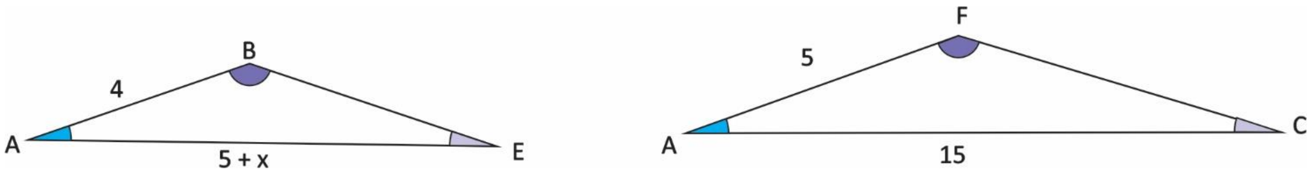
Questão 09.

Na figura abaixo, AB = 4, BC = 11, AF = 5 e ACD = AÊD. Calcule a medida ***x*** do segmento EF.

A) $\dfrac{44}{5}$
B) $\dfrac{55}{4}$
C) 6
D) 7
E) N.R.A.



RESOLUÇÃO:



Os triângulos ABE e AFC possuem o ângulo Â em comum, $\hat{E} = \hat{C}$, logo $\hat{B} = \hat{F}$ e os triângulos são semelhantes.

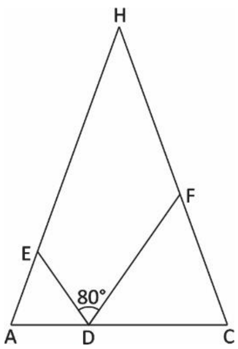
$\frac{4}{5+x} = \frac{5}{15} \Rightarrow 25 + 5x = 60 \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = 7$

RESPOSTA: a medida *x* do segmento EF é 7. (ALTERNATIVA D)

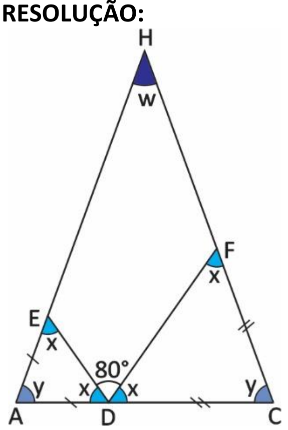
Questão 10.

Na figura ao lado, tem-se que AD = AE, CD = CF e HA = HC. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede 80°, então o ângulo AHC mede:

A) 20°
B) 30°
C) 50°
D) 60°
E) 90°



RESOLUÇÃO:



O triângulo AHC é isósceles, logo, $\hat{A} = \hat{C} = y$.

Os triângulos AED e DCF são isósceles de bases , respectivamente, $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$, logo, $A\hat{E}D = A\hat{D}E = C\hat{D}F = C\hat{F}D = x$.

Analisando a figura: $2x + 80° = 180° \Rightarrow 2x = 100° \Rightarrow x = 50°$.

No triângulo AED, $2x + y = 180° \Rightarrow 100° + y = 180° \Rightarrow y = 80°$.

No triângulo ACH, $2y + w = 180° \Rightarrow 160° + w = 180° \Rightarrow w = 20°$.

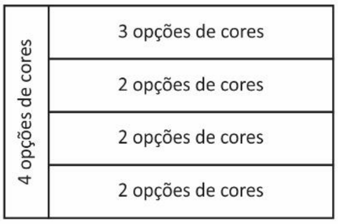
RESPOSTA: ALTERNATIVA A.

Questão 11.

A figura abaixo mostra uma bandeira com cinco faixas. A proposta é pintar cada faixa dessa bandeira com uma cor, de modo que duas faixas com uma linha fronteira comum não poderão ter a mesma cor. Se dispusermos de 4 cores diferentes, o número de modos distintos de que essa bandeira poderá ser pintada será

A) 24.
B) 36.
C) 96.
D) 72.
E) 80.

RESOLUÇÃO:



O número de modos distintos de que essa bandeira poderá ser pintada será $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

RESPOSTA: ALTERNATIVA C.

Questão 12. (PUC)

Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mãe e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais. Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é:

A) 4 B) 6 C) 24 D) 36 E) 48

RESOLUÇÃO:

	Número de opções para localização dos filhos					
Pai	4	3	2	1	Mãe	4.3.2.1 = 24
Mãe	4	3	2	1	Pai	4.3.2.1 = 24
TOTAL						48

Ou: $2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$

RESPOSTA: O número de formas em que poderão se posicionar para a foto é 24. (ALTERNATIVA E).

Questão 13. (UNEMAT)

Geralmente os alunos que terminam o Ensino Médio fazem uma festa de formatura, e durante o ano esses alunos realizam bingos, festas, etc para arrecadar fundos para a festa. Em uma escola há somente uma turma com 20 alunos, que se reuniram para formar uma comissão com 3 membros.

Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que a líder da classe terá de fazer parte do grupo?

A) 171 grupos.
B) 1140 grupos.
C) 60 grupos.
D) 680 grupos.
E) 57 grupos.

RESOLUÇÃO:

Se a comissão deve ser formada com 3 membros e o líder da classe terá de fazer parte do grupo, o total de grupos será $C_{19,2} = \frac{19 \times 18}{2} = \frac{342}{2} = 171$.

RESPOSTA: ALTERNATIVA A.

Questão 14. (UEPB)

Simplificando-se a expressão $\dfrac{[(n-1)!]^2-(n-2)!(n-1)!}{(n-2)!(n-1)!}$, obtém-se:

A) (n – 1)! B) n – 1 C) n! D) n – 2 E) (n – 2)!

RESOLUÇÃO:

Aplicando fatoração algébrica para a simplificação da fração $\dfrac{[(n-1)!]^2-(n-2)!(n-1)!}{(n-2)!(n-1)!}$

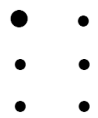
$$\frac{[(n-1)!]^2-(n-2)!(n-1)!}{(n-2)!(n-1)!}=\frac{\mathbf{(n-1)!}[(n-1)!-(n-2)!]}{(n-2)!\mathbf{(n-1)!}}=\frac{[(n-1)!-(n-2)!]}{(n-2)!}=\frac{[(n-1)(n-2)!-(n-2)!]}{(n-2)!}=\frac{\mathbf{(n-2)!}[(n-1)-1]}{\mathbf{(n-2)!}}=n-2$$

RESPOSTA: ALTERNATIVA D.

Questão 15. (ENEM)

A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra A é representada por:

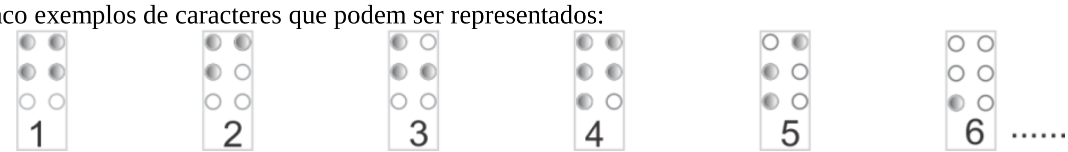


O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

A) 12. B) 31. C) 36. D) 63. E) 720.

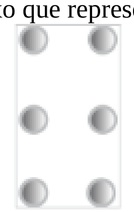
RESOLUÇÃO:

Cinco exemplos de caracteres que podem ser representados:

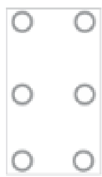


Para cada uma das seis posições de um ponto em um caráter existem duas opções: ponto cheio ou ponto vazio.
Total de caracteres: $2^6 = 64$.

Nesse total de caracteres está incluído o representado abaixo que representa a letra É:



Mas o caráter abaixo deve ser excluído, porque pelo menos um ponto deve se destacar para ser percebido pelo tato:



Então o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é $64 - 1 = 63$.

RESPOSTA: ALTERNATIVA D.