RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA DO VESTIBULAR 2020 DA UNICAMP-FASE 1.

RESOLUÇÃO: PROFA. MARIA ANTÔNIA C. GOUVEIA

QUESTÃO 32
Em uma família, cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, e cada filho tem um número de irmãs igual ao dobro do número de irmãos. O número total de filhos e filhas dessa família é igual a
a) 11. b) 9. c) 7. d) 5.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \text{1 filha tem x irmãos e x irmãs.} \\ \text{1 filho tem y irmãos e 2y irmãs.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 + x \\ 1 + y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 + 1 + y \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Número do número de filhos da família: 1 + 2x ou 1 + 3y.
Então o número de filhos da família é 1 + 2.3 = 7
RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 33
Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a
a) 48. b) 72. c) 96. d) 120.

RESOLUÇÃO:
O número total de posições distintas das cinco pessoas ficarem uma ao lado da outra é:
P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.
O número total de posições distintas das cinco pessoas ficarem uma ao lado da outra, sendo que duas delas fiquem sempre uma ao lado da outra é: P_2 . P_5 = 2! . 4! = 2 . 4.3.2.1. = 48.

Então o número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas, atendendo à condição de duas delas não ficarem lado a lado, é igual a: 120 – 48 = 72.
RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO 34
Um atleta participa de um torneio composto por três provas. Em cada prova, a probabilidade de ele ganhar é de 2⁄3, independentemente do resultado das outras provas.
Para vencer o torneio, é preciso ganhar pelo menos duas provas. A probabilidade de o atleta vencer o torneio é igual a
a) 2⁄3. b) 4⁄9. c) 20⁄27. d) 16⁄81.

RESOLUÇÃO:
Como para vencer o torneio, é preciso ganhar pelo menos duas provas, pode ocorrer:

- Vencer duas provas e perder uma: $C_{3,2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{1}{3}=\frac{3!}{1!.2!}.\frac{4}{9}.\frac{1}{3}=3.\frac{4}{27}=\frac{4}{9}$.
- Vencer as 3 provas: $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

Então a probabilidade de o atleta vencer o torneio é igual a: $\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$.

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 35
Sabendo que a é um número real, considere a função $f(x) = ax + 2$, definida para todo número real x. Se $f(f(1)) = 1$, então
a) $a = -1$. b) $a = -1/2$. c) $a = 1/2$. d) $a = 1$.

RESOLUÇÃO
Se $f(1) = a + 2$, então, $f(a + 2) = a\,(a+2) + 2 = 1 \Rightarrow$
$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a + 1)^2 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$
RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO 36
Sabendo que a é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a
a) 3. b) 4. c) 5. d) 6.

RESOLUÇÃO:
Considerando x e x’ como raízes da equação $2x^2 + ax + 10 = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} x+x'=\frac{-a}{2} \\ x.x'=\frac{10}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+x'=\frac{-a}{2} \\ x.x'=5 \end{cases}$$

Como as raízes são dois números inteiros de produto 5, então, as raízes são 1 e 5 ou –1 e –5.
Logo, |1 + 5| = |–1 + (–5) | = 6.
RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO 37
Considere que $(a, b, 3, c)$ é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a
a) 30. b) 10. c) –15. d) –20.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} a+b+c+3=8 \\ \text{Como } (a,b,3,c) \text{ é uma PA:} \\ b-a=3-b \text{ e } 3-b=c-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=5 \\ a=2b-3 \\ c=6-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=5 \\ (2b-3)+b+(6-b)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=5-3 \\ 2b=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a.b.c.3=-15}$$

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 38

Tendo em vista que a e b são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo, $f(2)$ é igual a

a) $\sqrt{f(1)f(3)}$. b) $f(3)/f(0)$. c) $f(0)/f(1)$. d) $f(0)^3$.

RESOLUÇÃO:

1) $f(2) = ab^2$
2) $f(1) = ab$
3) $f(3) = ab^3$
4) $f(0) = a$

Analisando a expressão do ítem a: $\sqrt{f(1)f(3)} = \sqrt{ab.ab^3} = \sqrt{a^2b^4} = \mathbf{ab^2} = \mathbf{f(2)}$

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO 39

Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T . Se $A + A^T$ é singular (não invertível), então

a) p = 0. b) $|p|$ = 1. c) $|p|$ = 2. d) p = 3.

RESOLUÇÃO:

Sendo $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$, então, $A^T = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 2 & p \end{bmatrix}$.

Então $A + A^T = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 2 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{bmatrix}$

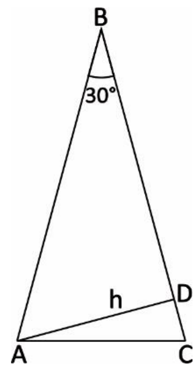
Se $A + A^T$ é singular (não invertível), então,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow 4p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1 \Rightarrow \mathbf{|p| = 1}$$

RESPOSTA: Alternativa b.

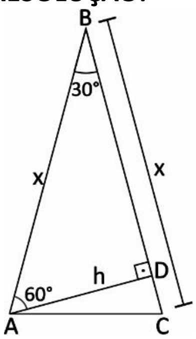
QUESTÃO 40

A figura abaixo exibe o triângulo ABC, em que AB = BC e $\overline{AD}$ é uma altura de comprimento h. A área do triângulo ABC é igual a



a) h^2 .
b) $\sqrt{2}h^2$.
c) $\sqrt{3}h^2$.
d) $2h^2$.

RESOLUÇÃO:



O triângulo ABD é retângulo cuja hipotenusa AB mede x.

Aplicando a este triângulo a Lei do Seno:

$$\frac{AD}{AB} = sen30° \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2h \Rightarrow AB = BC = 2h .$$

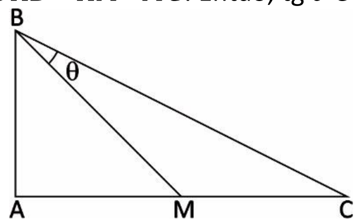
Determinando a área do triângulo ABC utilizando o seno do ângulo $\hat{B}$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.sen\hat{B} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.2h.2h.\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{S_{ABC} = h^2}$$

RESPOSTA: Alternativa a.

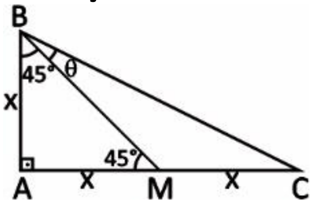
QUESTÃO 41

A figura abaixo exibe o triângulo retângulo ABC, em que AB = AM =MC. Então, tg θ é igual a



a) 1⁄2.
b) 1⁄3.
c) 1⁄4.
d) 1⁄5.

RESOLUÇÃO:



Pelos dados da questão o triângulo ABM é retângulo isósceles, e os catetos do triângulo retângulo ABC medem x e 2x e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 45° + θ.

Do triângulo ABC: $\text{tg}(45° + \theta) = \frac{2x}{x} = 2$.

Mas $\text{tg}(45° + \theta) = \frac{tg45° + tg\theta}{1 - tg45°.tg\theta} \Rightarrow \frac{tg45° + tg\theta}{1 - tg45°.tg\theta} = 2$

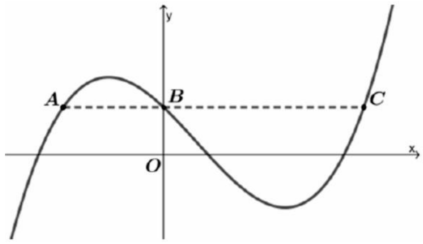
Como $tg45° = 1$ substituindo este valor na equação $\frac{tg45° + tg\theta}{1 - tg45°.tg\theta} = 2$, tem-se:

$$\frac{1 + tg\theta}{1 - tg\theta} = \frac{2}{1} \Rightarrow 1 + tg\theta = 2 - 2tg\theta \Rightarrow 3tg\theta = 1 \Rightarrow \mathbf{tg\theta = \frac{1}{3}}$$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO 42

Seja a função polinomial do terceiro grau $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, definida para todo número real x. A figura abaixo exibe o gráfico de $y = f(x)$, no plano cartesiano, em que os pontos A, B e C têm a mesma ordenada. A distância entre os pontos A e C é igual a



a) 2. b) $2\sqrt{2}$. c) 3. d) $3\sqrt{2}$.

RESOLUÇÃO:
Considerando que os pontos A, B e C têm a mesma ordenada m, pode-se concluir que pertencem à reta y = m.
Sendo iguais as ordenadas desses pontos, tem-se: A =(a, m), B = (0, m) e C = (c, m).
Substituindo os valores das coordenadas de B na equação $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$:
m = 0 – 0 – 0 + 1 $\Rightarrow$ m = 1.
Logo a reta à qual pertencem os três pontos é y = 1.
Os pontos em questão devem ser representados agora por: A =(a, 1), B = (0, 1) e C = (c, 1).
Substituindo agora as coordenadas de A na equação de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$:
$a^3 - a^2 - 2a + 1 = 1 \Rightarrow a^3 - a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a^2 - a - 2 = 0$.
Resolvendo a equação $a^2 - a - 2 = 0$, vem:

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-2)}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a' = -1 \text{ ou } a'' = 2$$

Os valores $a' = -1$ ou $a'' = 2$ são, respectivamente, as abscissas dos pontos A e C.
Logo A = (–1, 1) e B = (2, 1).
Como A e B possuem a mesma ordenada pertencem a reta y = 1 e a distância entre eles é a o módulo da diferença entre suas abscissas, ou seja, 2 – (–1) = 3.
RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 43
Sabendo que c é um número real, considere, no plano cartesiano, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2cx$. Se o centro dessa circunferência pertence à reta de equação $x + 2y = 3$, então seu raio é igual a
a) $\sqrt{2}$. b) $\sqrt{3}$. c) 2. d) 3.

RESOLUÇÃO:
Representando por C (m, n) o centro, da circunferência em questão, pertencente à reta de equação $x + 2y = 3$, pode-se escrever m + 2n = 3 $\Rightarrow$m = – 2n + 3. Então $C = (-2n+3,\ n)$.
De $x^2 + y^2 = 2cx$ chega-se a $x^2 - 2cx + y^2 = 0 \Rightarrow C = \left(\frac{-(-2c)}{2}, \frac{0}{2} \right) = (c,\ 0)$

Então, $(-2n+3, n) = (c, 0) \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ -2n + 3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (3,0)$.

Sendo c = 3, substituindo este valor na equação $x^2 - 2cx + y^2 = 0$,
$x^2 - 2.3x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2.3x + 9 - 9 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{R = 3}$
RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO 44
Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$.
b) $\sqrt[4]{2}\,\sqrt{3}$.
c) $\sqrt{2}\,\sqrt[4]{3}$.
d) $\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{3}$.

RESOLUÇÃO:
Considerando a como a medida da aresta do tetraedro regular e b a medida da aresta do cubo, suas área medem, respectivamente, $S_{tetaedro} = 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ e $S_{cubo} = 6 \times b^2$.

Como são iguais essas áreas:

$$a^2\sqrt{3} = 6b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{6.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{6.\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2.\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}.\sqrt[4]{3}$$

RESPOSTA: Alternativa c.